

Aula nº 28.

Ondas eletromagnéticas

Equações de Maxwell no vácuo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (1.c)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.d)$$

Consistente com a conservação de carga

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2)$$

Numa região onde não há fontes, cargas ou correntes elétricas, as Eqs (1.a) - (1.d) são descritas como

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (3.c)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.d)$$

Para simplificar vamos supor soluções onde a dependência espacial é dada

$$\vec{E} = \vec{E}(z, t) \quad (4)$$

$$\vec{B} = \vec{B}(z, t) \quad (5)$$

logo

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

(6)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z}(z, t)$$

(7)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_z}{\partial z}(z, t)$$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

(8)

$$= \hat{x} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\hat{x} \frac{\partial E_y}{\partial z} + \hat{y} \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

Assim da mesma maneira

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\hat{x} \frac{\partial B_y}{\partial z} + \hat{y} \frac{\partial B_x}{\partial z}$$

(9)

Substituindo as Eqs. (6)-(9) nas Eqs. 3.a-3d

ficamos explicitamente com

$$-\hat{x} \frac{\partial B_y}{\partial z} + \hat{y} \frac{\partial B_x}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} \hat{x} + \frac{\partial E_y}{\partial t} \hat{y} + \frac{\partial E_z}{\partial t} \hat{z} \right) \quad (10)$$

$$-\hat{x} \frac{\partial E_y}{\partial z} + \hat{y} \frac{\partial E_x}{\partial z} = - \frac{\partial B_x}{\partial t} \hat{x} - \frac{\partial B_y}{\partial t} \hat{y} - \frac{\partial B_z}{\partial t} \hat{z} \quad (11)$$

(12)

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

(13)

Das Eqs. (10) e (11) temos também

que

(14)

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0$$

(15)

Então

$$E_z = B_z = 0$$

Então ficamos com as Eqs. (10) e (11) com

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = +\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = +\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} & (a) \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} & (b) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial B_x}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} & (c) \\ \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t} & (d) \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} E_x &\rightarrow +E_y \\ B_y &\rightarrow -B_x \end{aligned}$$

Tomando as seguintes derivadas no 1º par, isto é, 6.
a Eq. (16.a) em relação a z e a Eq. (16.b) em relação a z , ficamos com:

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t \partial z} \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t \partial z} = - \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \quad (18)$$

segue que

$$\boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0} \quad (19)$$

e invertendo a ordem das derivadas no 2º par, isto é, derivando a Eq. (16.a) em relação a t e Eq. (16.b) em relação a z , ficamos com:

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial z} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = - \frac{\partial^2 B_y}{\partial z \partial t} \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = +\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

que segue

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0} \quad (22)$$

Logo tanto B_y , E_x e (também E_y e B_x)

satisfazem uma Eq. da onda em 1 dimensão

com velocidade

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (23)$$

Como

$$\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{4\pi \times 8,988755} \frac{\text{F}}{\text{m}}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$$

logo

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \approx 8,988755 \times 10^{16} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

$$v \approx 2,99792 \times 10^8 \text{ m/s} = c$$

logo

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

Basicamente temos que as equações para as componentes do campo elétrico e magnético satisfazem a eq. da onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (24)$$

cujas soluções

$$f(z,t) = F(z-vt) + G(z+vt) \quad (25)$$

F e G são funções arbitrárias.

Vamos considerar por exemplo

$$E_x(z, t) = E_x(z - ct) \quad (26)$$

Substituindo Eq. (26) nas Eqs. (16.a)-(16.b)

então

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = - \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

Fazendo $\xi = z - ct$ $\xi = \xi(z, t)$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (27)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (28)$$

Isso permite escrever as Eqs. (16.a)-(16.b)

como

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = + \frac{1}{c} E'_x(z)$$

(29)

onde $E'_x(z) \equiv \frac{\partial E_x}{\partial \xi}$

e

$$E'_x(z) = - \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

(30)

Isso significa que pela Eqs (29)

e (30):

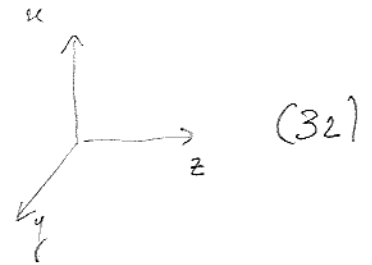
$$B'_y(\xi) = \frac{1}{c} E'_x(z)$$

$$\Rightarrow B_y(z,t) = \frac{1}{c} E_x(z-vt)$$

$$E'_x(z) = + c B'_y(\xi)$$

(31)

Ponto



$$\vec{E} = E_x (z - ct) \hat{z}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} E_x (z - ct) \hat{y} = \frac{1}{c} \hat{z} \times \vec{E}$$

Assim como fazendo $E_x \rightarrow E_y$; $B_y \rightarrow -B_x$

$$\vec{E} = E_y (z - ct) \hat{y}$$

$$B = -\frac{1}{c} E_y (z - ct) \hat{x} = \frac{1}{c} \hat{z} \times \vec{E}$$

(33)

Como pode ser visto pelas Eqs (32) e (33),
a direção de propagação é z, isto é, as
ondas são transversais

A forma da onda explícita (monocromática)

$$\vec{E} = A \cos [k(z - ct) + \delta] \hat{x}$$

$$= A \cos (kz - \omega t + \delta) \hat{x} \quad (34)$$

com $k = \frac{\omega}{c}$

$\vec{E}$ o campo magnético

$$\vec{B} = \frac{A}{c} \cos (kz - \omega t + \delta) \hat{y} \quad (35)$$

com período

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

frequência $\nu = \frac{1}{T}$

comprimento de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = cT$$

e a fase da onda

$$\phi = kz - \omega t + \delta$$

e $\delta =$ constante de fase

As duas soluções independentes para o $\vec{E}$ (na direção $\hat{x}$ e $\hat{y}$) são as duas polarizações lineares possíveis. Qualquer outra direção é uma combinação linear geral para uma direção das duas

de propagação $\hat{u}$ e linearmente polarizada

na direção $\hat{\epsilon} \perp \hat{u}$, a onda monocromática

é dada como

$$\vec{E} = \text{Re} \left\{ A \hat{\epsilon} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right\} ; \quad \vec{k} = k \hat{u} \quad (36)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{u} \times \vec{E}$$

$\vec{k} =$ vetor de onda

$\hat{\epsilon} =$ vetor de polarização